

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT



УДК 004.021:514.18

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-191-202>

Научная статья



## Методы применения матриц при создании моделей группового преследования

А.А. Дубанов

Институт математики и информатики Бурятского государственного университета им. Доржи Банзарова, г. Улан-Удэ,  
Российская Федерация

✉ [alandubanov@mail.ru](mailto:alandubanov@mail.ru)

### Аннотация

**Введение.** Очевидно, что в ближайшее время сохранят актуальность вопросы оснащения движущихся робототехнических комплексов элементами автономного управления. Это требует развития моделей группового преследования. Отметим, что оптимизация в задачах преследования сводится к построению оптимальных траекторий (кратчайшие траектории, траектории с дифференциальными ограничениями, показатели расхода топлива). При этом не рассматриваются аспекты автоматизированного распределения по целям при групповом преследовании. Для восполнения этого пробела выполнена представленная научная работа. Ее результатом должно стать построение модели автоматизированного распределения преследователей по целям в групповом преследовании.

**Материалы и методы.** Для изучения группового преследования множества целей сформирована матрица. Управляющие параметры движения преследователей модифицированы по минимальной кривизне траектории. Детально рассмотрены методы погони и сближения. Показаны возможности модификации метода параллельного сближения. Матричное моделирование задействовали для построения схемы группового преследования множества целей. Перечисленные процессы проиллюстрированы функциями в заданных системах координат и анимацией. Как база функций построены блок-схемы фазовых координат преследователя на следующем шаге, времени и расстояния достижения преследователем цели. В ряде случаев расположение целей и преследователей определено как точки на окружности Аполлония. Матрица сформирована по выборкам, соответствующим распределению преследователей по целям.

**Результаты исследования.** Рассмотрены девять вариантов погони, параллельного, пропорционального и трехточечного сближения на плоскости и в пространстве. Рассчитано максимальное значение времен достижения целей. Отмечены случаи, когда вектор скорости преследователя направлен произвольно и в точку на окружности Аполлония. Отмечено, что трехточечный метод сближения удобен, если цель движется по баллистической траектории. Для модификации метода параллельного сближения на плоскости строится сеть параллельных линий. При этом учтены длина дуги линии (которая может быть произвольной формы) и массив опорных точек траектории цели. С данными элементами составлено и решено уравнение. На массиве выборки с соответствующими значениями времен найдено минимальное время, то есть определено оптимальное время одновременного группового достижения множества целей. Для унифицированного обращения к библиотеке выражен управляющий вектор через однопараметрическое семейство параллельных плоскостей. Сформирована библиотека расчетов управляющих векторов. Показан пример применения матричного моделирования к групповому преследованию. Представлена схема группового преследования множества целей. Для двух целей и трех преследователей рассмотрены шесть выборок, соответствующих распределению преследователей по целям. Данные представлены в виде матрицы. По итогам научных изысканий создана и зарегистрирована программа для ЭВМ «Модель параллельного сближения на плоскости группы преследователей с одновременным достижением цели».

**Обсуждение и заключение.** Исследованы методы использования матриц при моделировании группового преследования. Показана возможность модификации метода параллельного сближения. Матричное

моделирование группового преследования позволяет выстроить его схему для множества целей. Матрица распределения преследователей по целям будет генерироваться в каждый момент времени. Методы формирования матриц распределения преследователей и целей представляют интерес при проектировании систем виртуальной реальности, для задач с моделированием процесса группового преследования, убегания, уклонения. Метод динамического программирования при формировании матрицы распределения преследователей по целям открывает возможность автоматизации распределения с оптимизацией по заданным параметрам.

**Ключевые слова:** алгоритм группового преследования, оптимизация в задачах преследования, автоматизированное распределение по целям, матрица достижения преследователями целей, автоматизированное принятие решений, автономное управление, параллельное сближение, пропорциональное сближение, трехточечный метод сближения, библиотека расчетов управляющих векторов

**Благодарности:** автор выражает признательность директору Института математики и информатики Бурятского государственного университета им. Д. Банзарова Антоновой Ларисе Васильевне за помощь, оказанную в работе над статьей.

**Для цитирования.** Дубанов А.А. Методы применения матриц при создании моделей группового преследования. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(2):191–202. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-191-202>

*Original article*

## Methods for Applying Matrices when Creating Models of Group Pursuit

Alexander A. Dubanov 

Institute of Mathematics and Computer Science, BSU, Ulan-Ude, Republic of Buryatia, Russian Federation

✉ [alandubanov@mail.ru](mailto:alandubanov@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** It is obvious that in the near future, the issues of equipping moving robotic systems with autonomous control elements will remain relevant. This requires the development of models of group pursuit. Note that optimization in pursuit tasks is reduced to the construction of optimal trajectories (shortest trajectories, trajectories with differential constraints, fuel consumption indicators). At the same time, the aspects of automated distribution by goals in group pursuit were not considered. To fill this gap, the presented piece of research has been carried out. Its result should be the construction of a model of automated distribution of pursuers by goals in group pursuit.

**Materials and Methods.** A matrix was formed to study the multiple goal group pursuit. The control parameters for the movement of the pursuers were modified according to the minimum curvature of the trajectory. The methods of pursuit and approach were considered in detail. The possibilities of modifying the method of parallel approach were shown. Matrix simulation was used to build a scheme of multiple goal group pursuit. The listed processes were illustrated by functions in the given coordinate systems and animation. Block diagrams of the phase coordinates of the pursuer at the next step, the time and distance of the pursuer reaching the goal were constructed as a base of functions. In some cases, the location of targets and pursuers was defined as points on the circle of Apollonius. The matrix was formed by samples corresponding to the distribution of pursuers by goals.

**Results.** Nine variants of the pursuit, parallel, proportional and three-point approach on the plane and in space were considered. The maximum value of the goal achievement time was calculated. There were cases when the speed vector of the pursuer was directed arbitrarily and to a point on the Apollonius circle. It was noted that the three-point approach method was convenient if the target was moving along a ballistic trajectory. To modify the method of parallel approach, a network of parallel lines was built on the plane. Here, the length of the arc of the line (which can be of any shape) and the array of reference points of the target trajectory were taken into account. An equation was compiled and solved with these elements. On an array of samples with corresponding time values, the minimum time was found, i.e., the optimal time for simultaneous group achievement of multiple goals was determined. For unified access to the library, the control vector was expressed through a one-parameter family of parallel planes. A library of calculations of control vectors was formed. An example of applying matrix simulation to group pursuit was shown. A scheme of group pursuit of multiple goals was presented. For two goals and three pursuers, six samples corresponding to the distribution of pursuers by goals were considered. The data was presented in the form of a matrix. Based on the research results, the computer program was created and registered – “Parallel Approach on Plane of Group of Pursuers with Simultaneous Achievement of the Goal”.

**Discussions and Conclusion.** The methods of using matrices in modeling group pursuit were investigated. The possibility of modifying the method of parallel approach was shown. Matrix simulation of group pursuit enabled to build its scheme for a set of purposes. The matrix of the distribution of pursuers by goals would be generated at each

moment of time. Methods of forming matrices of the distribution of pursuers and targets are of interest in the design of virtual reality systems, for tasks with simulating the process of group pursuit, escape, evasion. The dynamic programming method opens up the possibility of automating the distribution with optimization according to the specified parameters under the formation of the matrix of the distribution of pursuers by goals.

**Keywords:** algorithm of group pursuit, optimization in pursuit tasks, automated distribution by goals, matrix of achievement of goals by pursuers, automated decision-making, autonomous control, parallel approach, proportional approach, three-point approach method, control vector calculation library

**Acknowledgements:** the author would like to thank Larisa V Antonova, Director of the Institute of Mathematics and Computer Science, Banzarov Buryat State University, for her help provided in the work on the article.

**For citation:** Dubanov AA. Methods for Applying Matrices when Creating Models of Group Pursuit. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(2):191–202. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-191-202>

**Введение.** Алгоритмы преследования изучаются с точки зрения их классической и оптимальной реализации. Исследуется их роль в дифференциальных играх преследования. Прикладная сфера готовых решений весьма широка, т. к. результаты таких научных изысканий применимы в различных информационных технологиях и системах, в частности в поисковых. Безусловно также, что продолжительное время будут актуальны вопросы оснащения движущихся робототехнических комплексов элементами автономного управления, что также требует качественной реализации рассматриваемых алгоритмов.

В работах [1–4] исследовалось согласованное поведение группы преследователей и целей. Для общих теоретических и практических вопросов в задачах преследования рассматривались работы [5–9]. Наведение преследователя на цель анализировалось в свете информации, представленной в [10–13].

При всем теоретическом и практическом интересе к данной теме оптимизация в задачах преследования ограничивается построением оптимальных траекторий. Предлагаются, например, кратчайшие траектории, траектории с дифференциальными ограничениями, показатели расхода топлива. Но не рассматриваются аспекты автоматизированного распределения по целям при групповом преследовании. Для восполнения этого пробела проводилась данная научная работа. Ее главным результатом представляется построение модели автоматизированного распределения преследователей по целям в групповом преследовании. Показано формирование матрицы достижения преследователями целей. При назначении преследователям целей выполняется перебор всех возможных комбинаций достижения целей и выбирается комбинация минимального значения критерия из формируемого множества с максимальным значением.

Оптимизация группового преследования множества целей является перспективным направлением развития такой дисциплины, как оптимальное управление движением в задачах, связанных с автоматизированным принятием решений и автономным управлением.

**Материалы и методы.** В модели описанного в статье группового преследования цели движутся по предопределенным траекториям. Однако эта предопределенность не имеет принципиального значения. Преследователи распределяются по целям автоматически, на основе минимаксного решения целевой функции. Затем модифицируются управляющие параметры движения преследователей. В данной работе это параметр минимальной кривизны траектории. Такой подход позволяет обеспечить одновременное достижения целей.

Рассмотрим групповое преследование множества целей:  $N$  преследователей догоняют  $M$  целей. Сформируем матрицу распределения преследователей по целям:

$$\Psi_{ij}, \text{ где } i = 1..N, j = 1..M.$$

Каждая ячейка  $\Psi_{ij}$  содержит информацию о фазовых координатах  $i$ -го преследователя и  $j$ -й цели. В матрице  $\Psi_{ij}$  содержится информация о том, каким методом  $i$ -й преследователь преследует  $j$ -ю цель.

Данные, хранящиеся в ячейках матрицы, определяют обращение к библиотеке расчетов управляющих векторов преследователя.

В каждой ячейке матрицы  $\Psi_{ij}$  может рассчитываться прогнозируемое время достижения  $i$ -м преследователем  $j$ -й цели:  $t_{ij}$ .

### Результаты работы

В каждой полученной выборке  $A_k = \{\Psi_{i_k j_k} \dots \Psi_{i_n j_n}\}$  следует найти максимальное значение времен достижения  $t_k = \text{Max}\{t_{ij}\}$ , например из  $\{t_{21}, t_{23}, t_{32}, t_{41}\}$  (таблица 1).

Таблица 1

Выборки, соответствующие распределению преследователей по целям

Преследователи	Цели											
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	×		×		×			×		×		×
2		×	×			×	×		×			×
3		×		×	×		×			×	×	
Выборки	$A_1$		$A_2$		$A_3$		$A_4$		$A_5$		$A_6$	

Необходимо сформировать матрицы  $\Psi_{ij}$ , где  $i=1\ldots3$ ,  $j=1\ldots2$  в соответствии с возможными выборками  $A_k, k=1\ldots6$ . Затем, после обращения находится максимальное значение  $t_k=\text{Max}\{t_{ij}\}$ . Расчет позволил установить, что наибольшее время достижения демонстрирует преследователь  $P_1$ , настигающий цель  $T_1$  из выборки  $A_2$ .

Итак, рассмотрим выборку  $A_k$ . Можно увеличить до значения параметра  $t_k$  все значения  $t_{ij}$ , зависящие от векторов скоростей преследователей и целей, а также их допустимых угловых скоростей. Этим определяется максимальное значение  $t_k$ .

Получив массив выборок  $\{A_k\}$  с соответственными значениями времен  $\{t_{ij}\}$ , следует найти минимальное время  $t_{\min}=\text{Min}\{t_k\}$ . Так определяется оптимальное время одновременного группового достижения множества целей.

**Алгоритмы расчета следующего шага преследователя и оценки времени достижения преследователем цели.** На рис. 1 представлен алгоритм функции расчета следующего шага и вектора скорости движения преследователя.

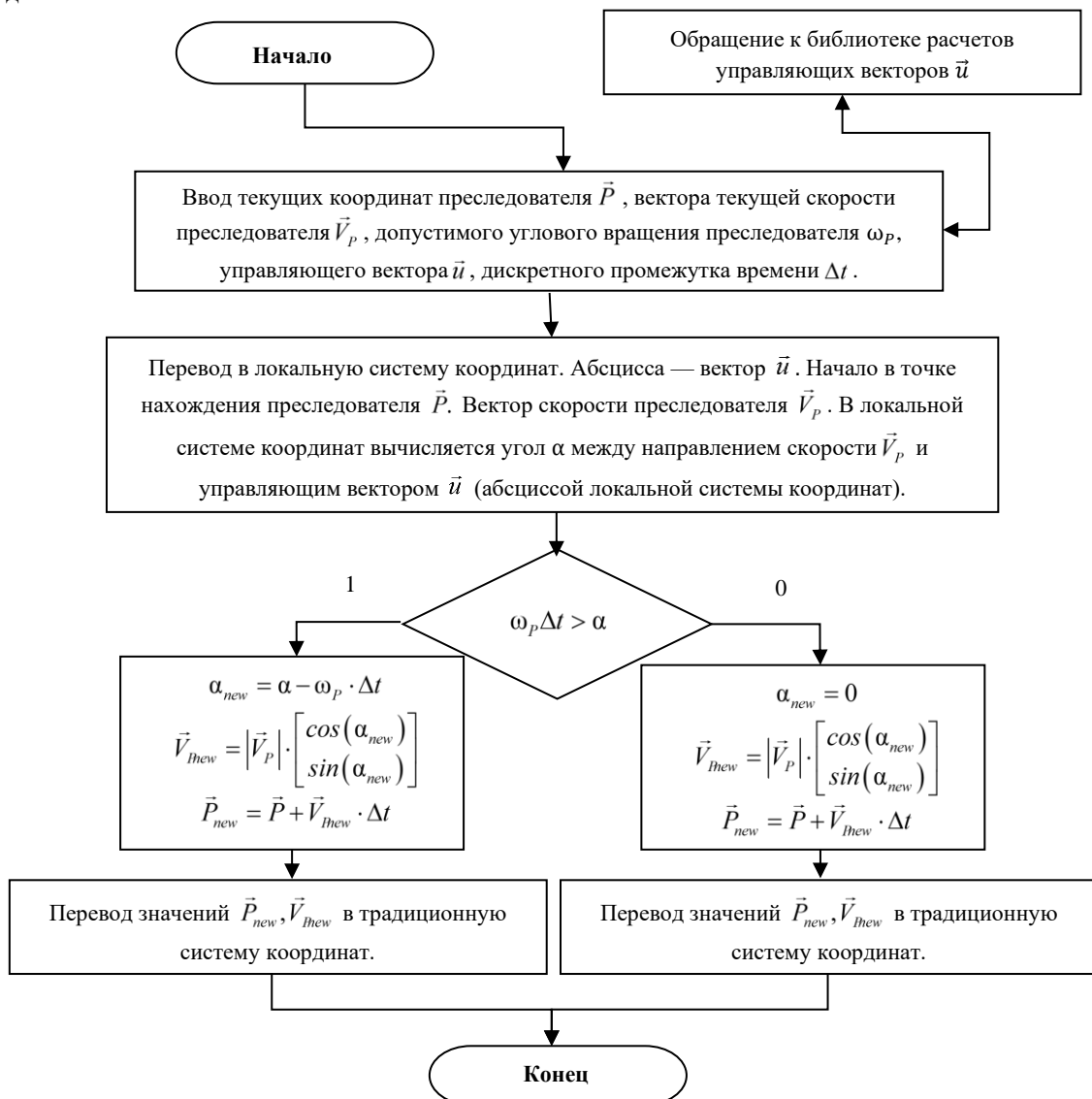


Рис. 1. Блок-схема расчета фазовых координат преследователя на следующем шаге

На рис. 2 представлен алгоритм расчета времени и расстояния достижения преследователем цели. Переменная  $\varepsilon$  — это пороговое значение расстояния от преследователя до цели, при достижении которого цель считается достигнутой.

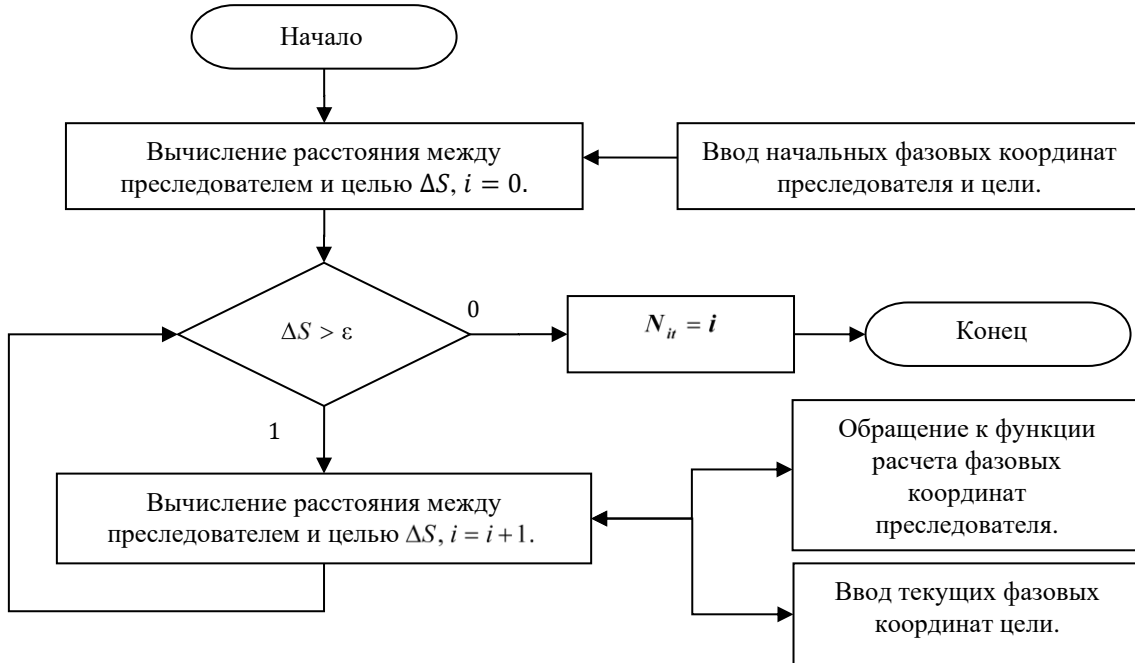


Рис. 2. Блок-схема функции расчета времени и расстояния достижения преследователем цели

Если цель движется по предопределенной траектории, то алгоритм, представленный на рис. 2, может дать оценку времени  $t_{ij}$  достижения  $i$ -м преследователем  $j$ -й цели. В этом случае выходным параметром функции может служить количество итераций процесса преследования  $N_{it}$ . Количество итераций  $N_{it}$  — выходной параметр функции расчета времени и расстояния достижения преследователем цели.

Если цель предпринимает ответные шаги, чтобы избежать достижения, следует оценивать время иначе. Нужно строить прогнозируемые траектории как составные из сегментов прямых, дуг окружностей, квадратных и кубических парабол и других известных линий. Это позволит не решать краевые задачи в расчетном цикле.

**Формирование библиотеки расчетов управляющих векторов.** Матрица распределения  $\Psi_{ij}$ , где  $i=1 \dots N$ ,  $j=1 \dots M$  преследователей по целям будет строиться на каждом дискретном промежутке времени. В каждой ячейке матрицы  $\Psi_{ij}$  будет храниться информация о методе преследования. На ней основывается обращение к библиотеке функций расчета управляющих векторов  $\vec{u}$  (рис. 3–11).

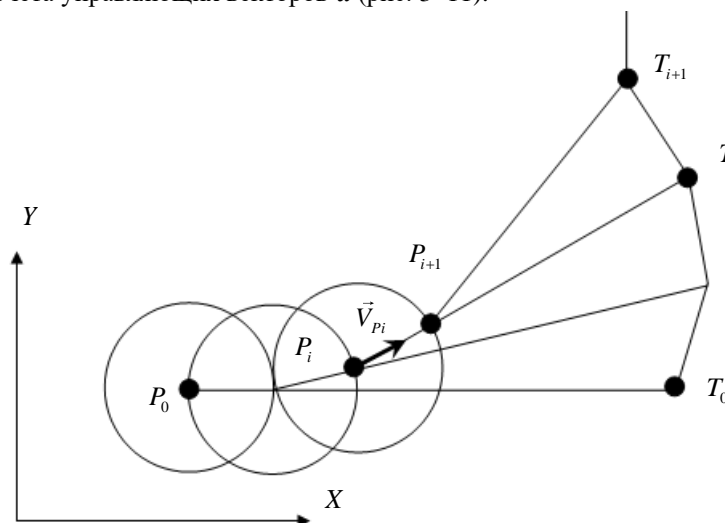


Рис. 3. Метод погони на плоскости и в пространстве:  $\vec{u}_i = \frac{\vec{T}_i - \vec{P}_i}{|\vec{T}_i - \vec{P}_i|}$ . Здесь  $\vec{T}_i$  — точка положения цели,

$\vec{P}_i$  — точка положения преследователя [14]

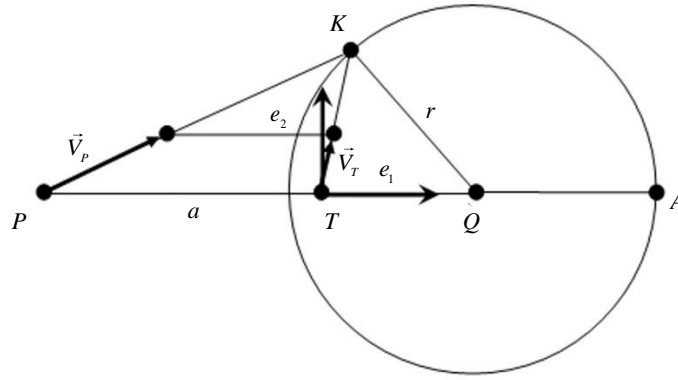


Рис. 4. Метод параллельного сближения на плоскости:  $\vec{u} = \frac{K-P}{|K-P|}$ ,  $T$  — точка положения цели,  $P$  — точка положения преследователя,  $K$  — точка на окружности Аполлония. Она однозначно определена точками  $P$ ,  $T$  и вектором скорости цели  $\vec{V}_T$  [15]

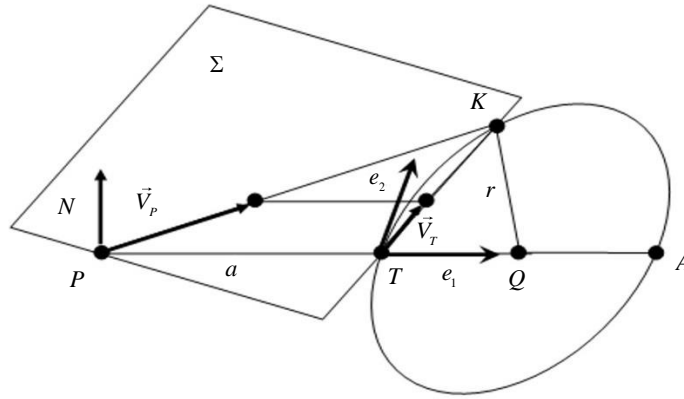


Рис. 5. Метод параллельного сближения в пространстве:  $\vec{u} = \frac{K-P}{|K-P|}$ ,  $T$  — точка положения цели,  $P$  — точка положения преследователя,  $K$  — точка на окружности Аполлония. Окружность Аполлония лежит в плоскости  $\Sigma$ , образованной точками  $P$ ,  $T$  и вектором скорости цели  $\vec{V}_T$  [16]. Показан случай, когда вектор скорости преследователя направлен произвольно. По истечении некоторого времени вектор скорости преследователя направлен в точку на окружности Аполлония

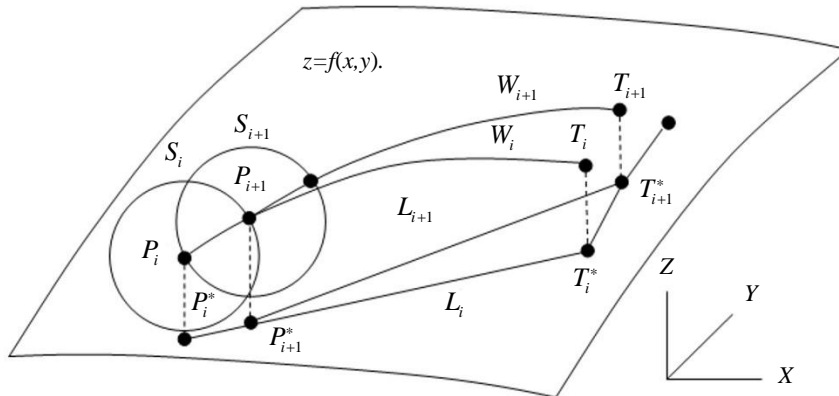


Рис. 6. Метод погони на поверхности:  $\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$ , где  $P_{i+1}$  — результат пересечения поверхности  $z=f(x,y)$ , плоскости  $P_i P_i^* T_i$  и сферы  $S_i$  с центром в точке  $P_i$ . Радиус  $|\vec{V}_T| \cdot \Delta t$ . Точка  $P_i^*$  — ортогональная проекция точки  $P_i$  на плоскость  $XY$ . Для унифицированного обращения к библиотеке необходимо выразить управляющий вектор [17]

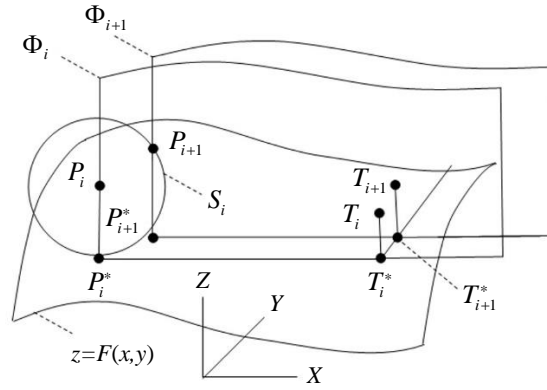


Рис. 7. Метод параллельного сближения на поверхности:  $\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$ . Здесь  $P_{i+1}$  — результат пересечения поверхности

$z=f(x,y)$ , плоскости  $P_{i+1}P_{i+1}^*T_{i+1}$  и сферы  $S_i$  с центром в точке  $P_i$ . Радиус  $|\vec{V}_i| \cdot \Delta t$ .

Точка  $P_{i+1}^*$  — ортогональная проекция точки  $P_{i+1}$  на плоскость  $XY$ . Для унифицированного обращения к библиотеке необходимо выразить управляющий вектор.  $\Phi_i$  — однопараметрическое семейство параллельных плоскостей [18]

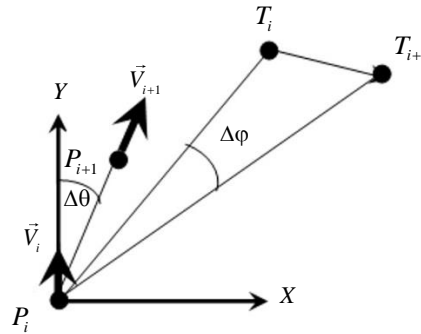


Рис. 8. Метод пропорционального сближения:  $\frac{d\theta}{dt} = k \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right)$ ,

$$\Delta\theta = k \cdot \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right), P_{i+1} = \begin{bmatrix} V_p \cdot \Delta t \cdot \cos\left(k \cdot \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right)\right) \\ V_p \cdot \Delta t \cdot \sin\left(k \cdot \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right)\right) \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$$

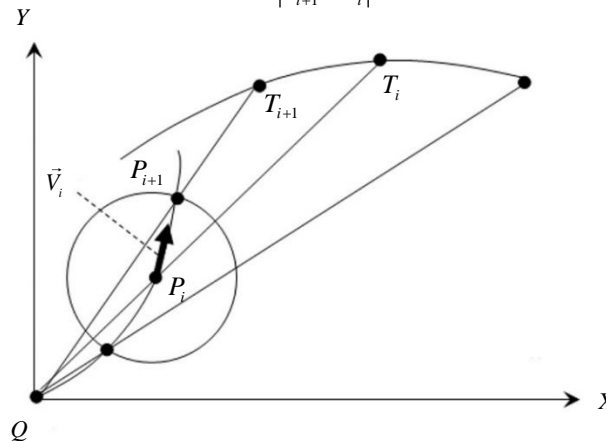


Рис. 9. Трехточечный метод сближения:  $(P_{i+1} - P_i)^2 = (\vec{V}_i \cdot \Delta t)^2$ ,  $\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$ ,  $P_{i+1} = (1 - \tau) \cdot Q + \tau \cdot T_{i+1}$ .

Метод удобен, если цель движется по баллистической траектории

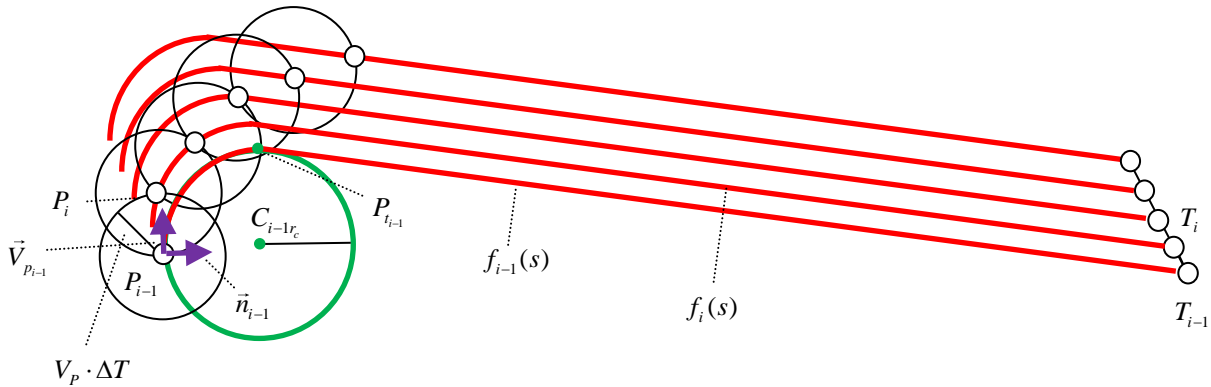


Рис. 10. Модификация метода параллельного сближения на плоскости. Строится сеть параллельных линий  $f_{i+1}(s) = f_i(s) + T_{i+1} - T_i$ , где  $s$  — длина дуги линии,  $T_i$  — массив опорных точек траектории цели. Решение уравнения  $(f_{i+1}(s) - P_i)^2 = (V_p \cdot \Delta t)^2$  относительно параметра  $s$  позволит найти значение  $s^*$ , которое будет соответствовать

$$P_{i+1} = f_{i+1}(s^*). \quad \vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|} \quad \text{В семействе } f_i(s) \text{ могут быть линии произвольной конфигурации [19]}$$

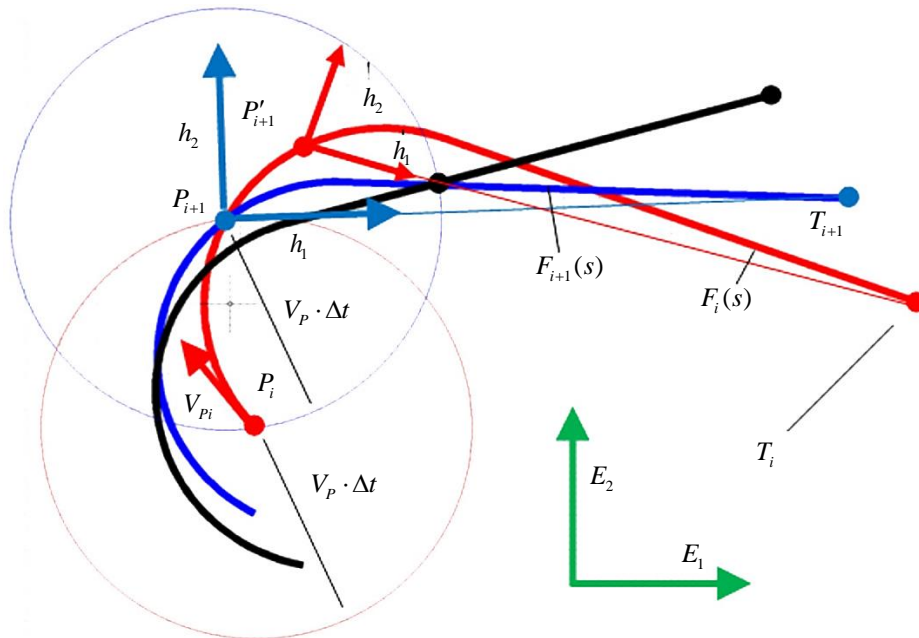


Рис. 11. Модификация метода погоней на плоскости. Строится сеть  $f_i(s)$ , где  $s$  — длина дуги линии,  $T_i$  — массив опорных точек траектории цели. Выполняется условие, что конец линии  $f_i(s)$  проходит через точку  $T_i$ , а точка  $P_i$  инцидентна линии  $f_i(s)$ , то есть используется в качестве лекала. Решение уравнения  $(f_{i+1}(s) - P_i)^2 = (V_p \cdot \Delta t)^2$

относительно параметра  $s$  позволит найти значение  $s^*$ , которое будет соответствовать  $P_{i+1} = f_{i+1}(s^*)$ .  $\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$ .

В семействе  $f_i(s)$  могут быть линии произвольной конфигурации [20]

Итак, библиотека расчетов управляющих векторов содержит методы погони на плоскости, в пространстве и на поверхности. Методы параллельного сближения рассчитываются на плоскости, в пространстве и на поверхности. Методы пропорционального сближения рассчитываются на плоскости и в пространстве. Трехточечные методы рассчитываются на плоскости и в пространстве. Модифицированные методы погони рассчитываются на плоскости и в пространстве, когда для управления преследователем задействуют допустимую кривизну траекторий. Модифицированные методы параллельного сближения рассчитываются на плоскости и в пространстве.

Модификация методов параллельного сближения и погони позволяет строить сеть прогнозируемых траекторий, которые допускают различные краевые условия. Это иллюстрируют рис. 3–11. Но на них

представлены далеко не все методы расчета управляющих векторов. Подразумевается, что это открытая, пополняемая библиотека функций.

**Пример применения матричного моделирования к групповому преследованию.** Рассмотрим пример группового преследования (рис. 12).

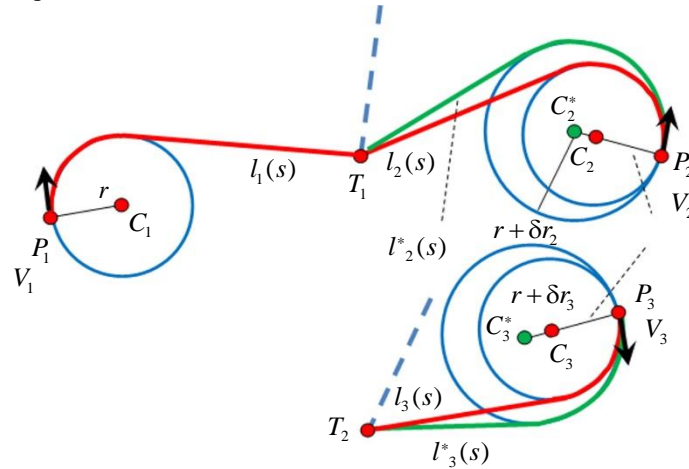


Рис. 12. Схема группового преследования множества целей

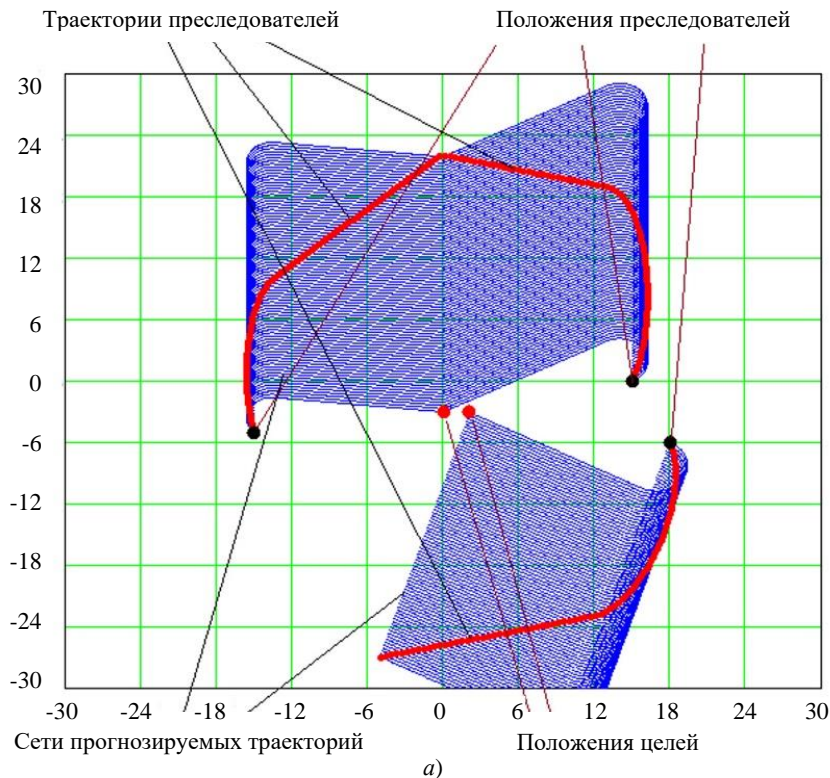
Здесь все преследователи достигают цели по модифицированному методу параллельного сближения, что соответствует рис. 10. В модели преследования на рис. 10 кривизна траектории не должна быть больше определенного значения. Поэтому у преследователей  $P_2$  и  $P_3$  увеличивается первоначальный радиус кривизны траектории, что показано на рис. 12.

Сформирована выборка  $A_k$ , в которой преследователь  $P_i$  догоняет  $T_j$ . Далее происходит первичная оценка времени достижения  $t_{ij}$ . Для оценки времени  $t_{ij}$  вычисляются:

- длина прямолинейного участка до цели,
- длина дуги сопрягаемой окружности допустимого радиуса.

Затем выбирается максимальное значение  $t_k = \max\{t_{ij}\}$ . Увеличение времени  $t_{ij}$  до  $t_k$  в данной модели происходит за счет увеличения у преследователя  $P_i$  радиуса сопрягаемой окружности со значения  $r_i$  до значения  $r_i + \delta r_i$ .

Рис. 13 дополнен анимированным изображением, где показан процесс группового преследования множества целей [21].



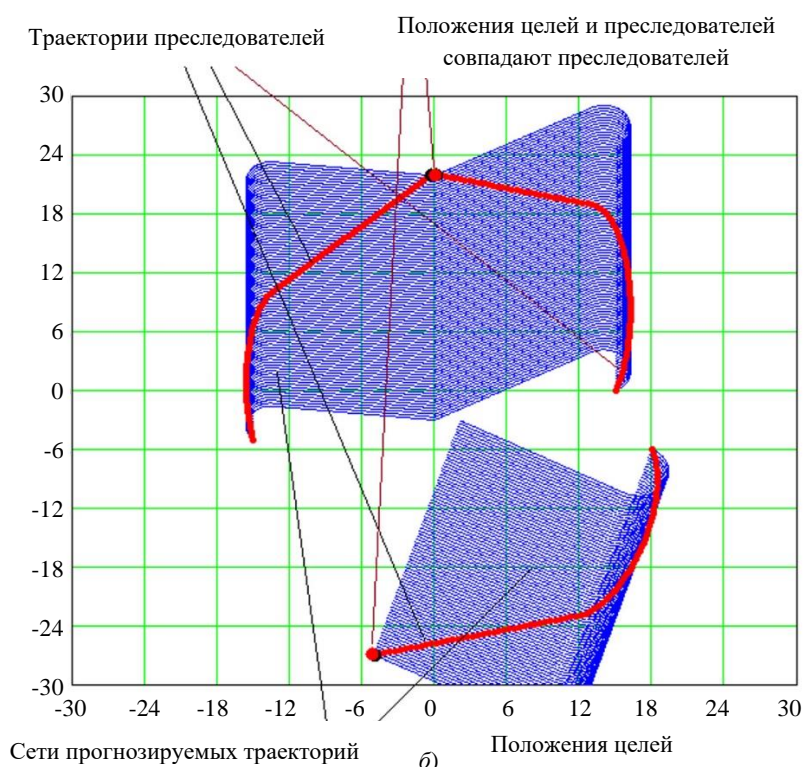


Рис. 13. Схемы фаз группового преследования: а — начальная фаза; б — конечная фаза

По результатам исследования создана и зарегистрирована программа для ЭВМ [22], которая реализует алгоритм группового преследования нескольких целей. Это программное решение называется «Модель параллельного сближения на плоскости группы преследователей с одновременным достижением цели».

**Обсуждение и заключение.** Описаны и визуализированы в виде функций на плоскости, на поверхности и в пространстве методы погони, параллельного, пропорционального и трехточечного сближения. Кроме того, показаны возможности модификации метода параллельного сближения на плоскости. С применением матричного моделирования к групповому преследованию выстраивается схема группового преследования множества целей. Отдельно показаны начальная и конечная фаза этого процесса. Расчет времени достижения позволил выявить преследователя, которому нужно наибольшее время, чтобы настичь цель из рассматриваемой выборки.

Итак, предполагается, что матрица распределения преследователей по целям будет генерироваться в каждый момент времени. Цели и преследователи могут исчезать, могут появляться новые. Такая матрица может использоваться и стороной, представляющей цели, которая уклоняется от преследования. Итоги описанных в статье научных изысканий позволят сформировать принципы автоматизированного распределения преследователей по целям на основе выбранной целевой функции. Предлагаются алгоритмы модификации траекторий преследователей для достижения целей одновременно или согласно установленному графику. Также рассматриваются вопросы формирования библиотеки методов преследования. Метод формирования матрицы распределения преследователей по целям может быть востребован при проектировании систем виртуальной реальности для игровых задач, в которых моделируется процесс группового преследования, убегания и уклонения.

### Список литературы

1. Раппопорт И.С. Стратегии группового сближения в методе разрешающих функций для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2019;55(1):149–163.
2. Bannikov A.S. Some Non-Stationary Problems of Group Pursuit. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of UdSU*. 2013;1(41):3–46.
3. Хачумов М.В. Решение задачи следования за целью автономным летательным аппаратом. *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2015;2:45–52.
4. Хачумов М.В. Задачи группового преследования цели в условиях возмущений. *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2016;2:46–54.
5. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П. Уклонение групповой цели в трехмерном пространстве. *Автоматика и телемеханика*. 2008;5:3–14.

6. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления. *Кибернетика и системный анализ*. 2013;49(5):132–145.
7. Chikrii A.A. Game Dynamic Problems for Systems with Fractional Derivatives. In book: Altannar Chinchuluun, et al. (eds.) *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York, NY: Springer; 2008. Vol. 17. P. 349–386. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-77247-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-0-387-77247-9_13)
8. Borie R.B., Tovey C.A., Koenig S. *Algorithms and Complexity Results for Pursuit-Evasion Problems*. In: Proc. 21st Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI). Pasadena, CA: Morgan Kaufmann Publishers Inc.; 2009. P. 59–66.
9. Созинов П.А., Горевич Б.Н. Кинематический анализ методов пропорциональной навигации применительно к наведению зенитной управляемой ракеты на баллистическую цель. *Вестник концерна ВКО «Алмаз-Антей»*. 2022;2:74–92. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2022-2-74-92>
10. Zarchan P. *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 5th ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2006. 888 p.
11. Chikrii A.A. *Conflict-Controlled Processes*. Dordrecht, Boston, London: Springer Science and Business Media; 2013. 424 p.
12. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix Resolving Functions in Game Problems of Dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015;291(1):56–65. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090047>
13. Chern F. Chung, Tomonari Furukawa. A Reachability-Based Strategy for the Time-Optimal Control of Autonomous Pursuers. *Engineering Optimization*. 2008;40(1):67–93.
14. Дубанов А.А. Модель метода погони на плоскости и в пространстве. URL: <https://youtu.be/PAu9Qg1dySM> (дата обращения: 16.01.2023).
15. Дубанов А.А. Модель метода параллельного сближения на плоскости. URL: <https://youtu.be/hGieKXNiuZ8> (дата обращения: 16.01.2023).
16. Дубанов А.А. Модель параллельного сближения в пространстве. URL: <https://youtu.be/8nDUSi3ENB4> (дата обращения: 16.01.2023).
17. Дубанов А.А. Модель метода погони на поверхности URL: [https://youtu.be/sU724Db\\_VMk](https://youtu.be/sU724Db_VMk) (дата обращения: 16.01.2023).
18. Дубанов А.А. Модель метода параллельного сближения на поверхности. URL: <https://youtu.be/06ggINE4j8U> (дата обращения: 16.01.2023).
19. Дубанов А.А. Модификация метода параллельного. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qNXdykK21Z8> (дата обращения: 16.01.2023).
20. Дубанов А.А. Модификация метода погони. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=UQ5bVKjVqZ4> (дата обращения: 16.01.2023).
21. Дубанов А.А. Результаты моделирования задачи. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=NNJDJOJT34I> (дата обращения: 9.07.2022).
22. Дубанов А.А. и др. *Модель параллельного сближения на плоскости группы преследователей с одновременным достижением цели*. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2021618920 РФ. 2021.

## References

1. Rappoport IS. Strategii gruppovogo sblizheniya v metode razreshayushchikh funktsii dlya kvazilineinykh konfliktno-upravlyaemykh protsessov. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019;55(1):149–163. (In Russ.)
2. Bannikov AS. Some Non-Stationary Problems of Group Pursuit. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of UdsU*. 2013;1(41):3–46.
3. Khachumov MV. The Solution of the Problem of the Target Following by the Autonomous Aircraft. *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2015;2:45–52.
4. Khachumov MV. Problems of Group Pursuit of a Target in a Perturbed Environment. *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2016;2:46–54.
5. Abramyan TG, Maslov EP, Yahno VP. Evasion of Multiple Target in Three-Dimensional Space. *Automation and Remote Control*. 2008;5:3–14.
6. Samatov BT. O zadachakh gruppovogo presledovaniya pri integral'nykh ogranicheniyakh na upravleniya. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013;49(5):132–145. (In Russ.)
7. Chikrii AA. Game Dynamic Problems for Systems with Fractional Derivatives. In book: Altannar Chinchuluun, et al. (eds.) *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York, NY: Springer; 2008. Vol. 17. P. 349–387. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-77247-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-0-387-77247-9_13)
8. Borie RB, Tovey CA, Koenig S. *Algorithms and Complexity Results for Pursuit-Evasion Problems*. In: Proc. 21st Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI). Pasadena, CA: Morgan Kaufmann Publishers Inc.; 2009. P. 59–66.

9. Sozinov PA, Gorevich BN. Kinematic Analysis of Proportional Navigation Methods as Applicable to Surface-to-Air Missile Guidance to a Ballistic Target. *Vestnik Koncerna VKO "Almaz – Antey"*. 2022;2:74–92.
10. Zarchan P. *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 5th ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2006. 888 p.
11. Chikrii AA. *Conflict-Controlled Processes*. Dordrecht, Boston, London: Springer Science and Business Media; 2013. 424 p.
12. Chikrii AA, Chikrii GTs. Matrix Resolving Functions in Game Problems of Dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015;291(1):56–65. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090047>
13. Chern F Chung, Tomonari Furukawa. A Reachability-Based Strategy for the Time-Optimal Control of Autonomous Pursuers. *Engineering Optimization*. 2008;40(1):67–93.
14. Dubanov AA. Model' metoda pogoni na ploskosti i v prostranstve. URL: <https://youtu.be/PAu9Qg1dySM> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
15. Dubanov AA. Model' metoda parallel'nogo sblizheniya na ploskosti. URL: <https://youtu.be/hGieKXNiuz8> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
16. Dubanov AA. Model' parallel'nogo sblizheniya v prostranstve. URL: <https://youtu.be/8nDUSi3ENB4> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
17. Dubanov AA. Model' metoda pogoni na poverkhnosti. URL: [https://youtu.be/sU724Db\\_VMk](https://youtu.be/sU724Db_VMk) (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
18. Dubanov AA. Model' metoda parallel'nogo sblizheniya na poverkhnosti. URL: <https://youtu.be/06qgINE4j8U> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
19. Dubanov AA. Modifikatsiya metoda parallel'nogo. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qNXdykK21Z8> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
20. Dubanov AA. Modifikatsiya metoda pogoni. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=UO5bVKjVqZ4> (accessed: 16.01.2023). (In Russ.)
21. Dubanov AA. Rezul'taty modelirovaniya zadachi. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=NNJDJOJT34I> (accessed: 9.07.2022). (In Russ.)
22. Dubanov AA, et al. *Model' parallel'nogo sblizheniya na ploskosti gruppy presledovatelei s odnovremennym dostizheniem tseli*. RF Certificate of State Registration of Computer Program No. 2021618920, 2021. (In Russ.)

**Поступила в редакцию** 14.04.2023

**Поступила после рецензирования** 29.04.2023

**Принята к публикации** 30.04.2023

*Об авторе:*

**Александр Анатольевич Дубанов**, кандидат технических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики института математики и информатики Бурятского государственного университета им. Д. Банзарова (670000, РФ, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5) [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [AuthorID](#), [alandubanov@mail.ru](mailto:alandubanov@mail.ru)

*Конфликт интересов:* автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

**Received** 14.04.2023

**Revised** 29.04.2023

**Accepted** 30.04.2023

*About the Author:*

**Alexander A Dubanov**, Cand.Sci. (Eng), Associate Professor of the Department of Geometry and Teaching Methodology, Institute of Mathematics and Computer Science, BSU (5, Ranzhurova St., Ulan-Ude, Republic of Buryatia, 670000, RF), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [AuthorID](#), [alandubanov@mail.ru](mailto:alandubanov@mail.ru)

*Conflict of interest statement:* the author does not have any conflict of interest.

*The author has read and approved the final manuscript.*